



MINISTÈRE
DE LA JUSTICE

*Liberté
Égalité
Fraternité*

DIRECTION DE L'ADMINISTRATION PÉNITENTIAIRE

CONCOURS EXTERNE, INTERNE ET TALENTS POUR LE RECRUTEMENT DES DIRECTEURS DES SERVICES PÉNITENTIAIRES

SESSION 2024

3^{ème} épreuve d'admissibilité

**Une composition ou une étude de cas portant sur
l'option choisie :
Statistiques et mathématiques**
(Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 4)

*Aucun document, outil électronique ou calculatrice
ne sont autorisés pour cette épreuve*

*Les exercices sont tous indépendants les uns des autres et peuvent être abordés
dans l'ordre souhaité par le candidat.*

*Le jury attire l'attention des candidats sur la qualité de leur rédaction, de la
présentation des raisonnements, et sur la précision de la citation des théorèmes
employés*

Exercice 1 : géométrie dans l'espace et du plan (3,5pts, toutes les questions sont indépendantes)

- a) Dans un repère orthonormé de l'espace, soit (d) une droite passant par A et B de coordonnées : A(5 ;3 ;1) et B(3 ;5 ;2).

Ecrire (d) comme intersection de deux plans sous la forme $ax+by+cz+d=0$

- b) Démontrer que l'équation suivante est celle d'un cercle de centre C (dont on donnera les coordonnées) et de rayon R (dont on donnera la mesure) :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 2 = 0$$

- c) ABCD est un rectangle, tel que : AB=3cm et AD=5cm

Quelle est l'aire de l'image de ABCD par l'homothétie de centre A et de rapport « -3 » ?

Exercice 2 : questions de probabilités (2,5pts, toutes les questions sont indépendantes)

- 1) Une urne contient 7 boules jaunes et 5 boules noires. On tire simultanément 3 boules et on note leur couleur. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules jaunes ?
- 2) Combien y a-t-il de sous-ensembles de 3 éléments dans un ensemble de 9 éléments ?
- 3) Une urne contient 7 boules : 4 blanches et 3 rouges. On tire une boule au hasard 6 fois de suite et on la repose dans l'urne à chaque fois. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge et 5 boules blanches ?

Exercice 3 : Circuits électriques couplés par inductance mutuelle (systèmes d'équations différentielles) : 6pts

Deux circuits électriques (1 et 2) sont couplés avec chacun une bobine et un condensateur alimentés par un courant électrique. Par définition, les charges instantanées $q(t)$ sont liées aux courants électriques $i(t)$ par les équations suivantes :

$$i_j(t) = \frac{dq_j(t)}{dt}, \forall j \in \{1;2\}$$

De plus les équations de maille donnent :

$$L \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{q_1}{C} + M \frac{di_2(t)}{dt} = 0$$

$$L \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{q_2}{C} + M \frac{di_1(t)}{dt} = 0$$

Avec L, C, M qui sont des paramètres fixes.

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$q_1(0) = Q \text{ où } Q \text{ est un paramètre}$$

$$q_2(0) = 0$$

$$\frac{dq_1(0)}{dt} = 0$$

$$\frac{dq_2(0)}{dt} = 0$$

- 1) Définir quelles sont les formes des équations différentielles ? En déduire la possibilité ou non de solutions ? Sont-elles uniques ? (il faudra justifier en utilisant les théorèmes attendus)
- 2) Déterminer les solutions, en fonction des conditions initiales, pour $q_1(t)$, $q_2(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Exercice 4 : Agrégats de sécurité routière, tableau de données (4 pts)

Selon les « Gisements de sécurité routière : les deux-roues motorisés » publiés en 2008 à La Documentation Française, sous la direction du préfet R.Guyot, la part des motos sur les routes s'élevait en 2005 à 1%.

Selon la même source, le nombre de tués sur les routes était réparti de la manière suivante entre 1996 et 2006 :

Années	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Motos	792	888	963	963	947	1081	1040	869	870	881	769
Autos	5601	5419	5870	5517	5351	5343	4920	3751	3406	3065	2626
total	8638	8539	9020	8583	8171	8253	7744	6127	5593	5318	4709

2002 correspond au lancement public du chantier présidentiel de la sécurité routière. Les premiers radars sont déployés à partir de 2003.

- 1) Construire des agrégats (leur donner un nom) pour expliquer :
 - L'évolution du nombre de tués par catégorie ;
 - Le sur-risque d'être tué en étant motard ou automobiliste.
- 2) Comment peuvent être choisies les années de référence pour être significative d'une politique publique présidentielle ?
- 3) Poser le calcul pour les agrégats de la question 1, et donner un ordre de grandeur des résultats.
- 4) Si on choisissait l'année 1996, comment est-ce que le discours de bilan de l'efficacité de cette politique publique serait influencé ?

Exercice 5 : deux études de suite (4 points, questions indépendantes)

On définit une suite de terme général $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, où \mathbf{N} est l'ensemble des entiers naturels.

1) $\forall r \in]0; 1[, \forall (u_0, u_1) \in]-\infty; +\infty[^2, u_{n+1} = u_n + r^n u_{n-1}$

Etudier la suite de terme général $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$

2) $v_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$

Etudier la convergence et un équivalent du reste de Cauchy d'ordre n pour la série de terme général (v_n)