

**CONCOURS EXTERNE, INTERNE ET TALENTS
POUR LE RECRUTEMENT DES
DIRECTEURS DES SERVICES PÉNITENTIAIRES**

SESSION 2023

3^{ème} épreuve d'admissibilité

**Une composition ou une étude de cas portant sur
l'option choisie :
Statistiques et mathématiques**

(Durée : 4h00 ; coefficient : 4)

Aucun document, outil électronique ou calculatrice
ne sont autorisés pour cette épreuve

Les exercices sont tous indépendants les uns des autres et peuvent être abordés
dans l'ordre souhaité par le candidat.

Le jury attire l'attention des candidats sur la qualité de leur rédaction, de la
présentation des raisonnements, et sur la précision de la citation des théorèmes
employés

Exercice 1 : Equation de la chaleur, isolation thermique (6 points)

L'équation de la chaleur est très importante dans l'histoire de la physique, et a des applications très concrètes, notamment sur l'isolation thermique des bâtiments.

On définit : $\Omega =]0; 1[\times \mathbf{R}^{+*}$, avec $\mathbf{R}^{+*} =]0; +\infty[$ et $\bar{\Omega}$ désigne l'adhérence de Ω , ce qui signifie que : $\bar{\Omega} = [0; 1] \times \mathbf{R}^+$, avec $\mathbf{R}^+ = [0; +\infty[$

L'objectif de cet exercice est de rechercher une fonction $u(x,t)$ de Ω dans $] -\infty; +\infty[$, où u est une température dépendant de sa position et du temps, vérifiant l'équation suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On recherche $u(x,t)$ sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées : $u(x,t) = f(x)g(t)$

- 1) Résoudre cette équation avec les hypothèses ci-dessus.
- 2) Application numérique : on considère que l'épaisseur du mur est de 1, et que les températures sont de 20°C à l'abscisse 0 pour x , et de 0°C à l'abscisse 1 pour x . (mur de séparation entre l'intérieur et l'extérieur). On pose également que $g(0)=1$. Donner une expression de $u(x,t)$
- 3) Application numérique n°2 : on utilise les mêmes données qu'à la question 2, sauf l'épaisseur du mur qui passe à 10. Donner une expression de $u(x,t)$. En comparant les deux expressions, qu'en déduisez-vous ?

Exercice 2 : Le petit train (2 points)

Un train T1 circule à la vitesse de 180km/h.

- a) Il démarre de la gare A à 10h en direction de la gare B distante de 450km. A quelle heure va-t-il arriver ?
- b) Un train T2 démarre de A à 11h en direction de la gare B, mais circule à la vitesse de 360km/h. A quelle heure va-t-il arriver ? T2 va-t-il rattraper T1, et si oui où et à quelle heure ?
- c) Un train T3 démarre de B à 10h, et circule en direction de A à la vitesse de 360km/h. A quelle heure va-t-il croiser le train T1 ?

Exercice 3 : Convergence et somme de série (4 points)

Dans cet exercice, pour toutes les questions, on devra s'assurer de la convergence de la série dont le terme général est indiqué ci-dessous, et, s'il existe, on calculera sa somme.

a)

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

b)

$$u_n = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$$

Exercice 4 : Calcul d'intégrales (4 points)

Dans cet exercice, l'objectif est de calculer des intégrales après avoir justifié rapidement de leur convergence.

a) $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^2} dt$

b) $\int_0^x \frac{\sqrt{t^3+1}}{(t)^4} dt$

Exercice 5 : Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples (4 points)

Décomposez la fraction rationnelle suivante en éléments simples, en veillant à justifier chaque étape :

$$A = \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)^2}$$