MINISTERE DE LA JUSTICE
DIRECTION DE L'ADMINISTRATION PENITENTIAIRE

****

CONCOURS EXTERNE, INTERNE ET TALENTS POUR LE RECRUTEMENT DE DIRECTEURS DES SERVICES PENITENTIAIRES SESSION 2022

3ème épreuve d'admissibilité

STATISTIQUES ET MATHEMATIQUES

(Durée : 4H00 ; coefficient : 4)

****

Ce sujet comporte sept exercices indépendants entre eux que les candidats peuvent résoudre dans l'ordre qu'ils souhaitent. Un soin particulier devra être apporté à la rédaction et à la citation des théorèmes employés.

Aucun document, outil électronique ou calculatrice ne sont autorisés pour cette épreuve.

Les candidats sont invités à prendre connaissance de l'ensemble du sujet avant de commencer.

I. Nombres complexes (2pt)

Déterminer le module et l'argument de z= $\frac{1+\mathrm{i}}{1-i}$.

Calculer : z^{32}

II. Suites qui convergent… ou pas ? (2 pts)

Soit la suite $(x_n)_{n\in N}$ définie par $x_0 = 4$ et : $x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2}$

Déterminer les points fixes éventuels par passage à la limite. La suite est-elle convergente ?

III. Primitives/intégrales (2pts)

Justification de l'existence et calcul de l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

IV. Equations différentielles avec changement de fonction (3 pts)

Résoudre dans l'espace des nombres réels :

$x''^2(t) + 2xy'(t) + (2 - x^2)y(t) = 0$

(Indication : changement de fonction… avec z=y/x …)

V. Espace vectoriel ou non avec justificatifs (5pts)

Pour cet exercice uniquement, 0pts pour une réponse absente, 1pt enlevé par réponse fausse dans la limite des 5pts de l'exercice, 0,25 pts par réponse exacte, et 0,25 en plus si toutes les réponses sont exactes.

Indiquer si les objets suivants sont des espaces vectoriels ou non (en justifiant, évidemment).

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0, 1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ pour les mêmes opérations.
3. L'ensemble des solutions (x_1, x_2, x_3) du système : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = & 0. \end{array}\right.$

4. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(1/2)=0$.
5. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda \cdot x = x^\lambda$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.
6. L'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.
7. L'ensemble des fonctions sur $[a,b]$ continues, vérifiant $f(a) = 7f(b) + \int_a^t t^3 f(t)\, dt$.
8. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulle en 1 ou nulle en 4.
9. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme somme d'une fonction nulle en 1 et d'une fonction nulle en 4. Identifier cet ensemble.
10. L'ensemble des polynômes de degré exactement n.
11. L'ensemble des fonctions de classe C^2 vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
12. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$.
13. L'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur $\mathbb{R}$.
14. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
15. L'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x+y) = 0$.
16. L'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1,3,-2)$.
17. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $\int_0^1 \sin x f(x)\, dx = 0$.
18. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.
19. L'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.

VI. Algèbre linéaire (4 points)

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On veut étudier les matrices qui peuvent s'écrire sous la forme :

$A^2 = \alpha A + \beta I_n$, où I_n est la matrice identité

1. Montrer que A^n est également une combinaison linéaire de A et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que si β est non nul, alors A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de A et I_n.
3. Application 1 : soit $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice Attila (envahie par les uns...), avec $n \geqslant 1$. Montrer que $A^2 = (n-2)\,A + (n-1)\,I_n$; en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.
4. Application 2 : montrer que si $n = 2$, A^2 est toujours une combinaison linéaire de A et I_2, et retrouver la formule donnant A^{-1} en utilisant 2.

VII. Longueur de courbe (2 pts)

Si on note (x,y) respectivement les abscisses et les ordonnées :

Déterminer la longueur de la courbe $y = \sqrt{x}(1 - \frac{x}{3})$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$.